

WGM誘電体球状共振器を用いた 材料の誘電率の簡易計算法

A Simple Calculation Method for Evaluating the Permittivity by using
Whispering Gallery Mode on a Spherical Dielectric Resonator

松原 真理, 苫米地 義郎

MATSUBARA Mari*¹ and TOMABECHI Yoshiro*¹

We have developed a new calculation method for evaluating a permittivity of a dielectric material by using Whispering Gallery Mode on a spherical dielectric resonator. This calculation method needs only one pair of a resonance frequency and resonance mode number. As a result of this study, it has been cleared that obtained value from this method and Newton method show good agreement each other. Then this method may play an important role for an evaluating the permittivity in millimeter wave band.

1 まえがき

近年の情報化社会の発展と共に、携帯電話等無線情報技術の発達により電波の利用は急激に増加しており、周波数資源の枯渇が危惧されている。そこで、未使用周波数帯域であるミリ波帯域（30～300 [GHz]）の利用が期待されている。ミリ波帯は殆ど利用されていない広大な周波数領域であり、情報の大容量伝送を可能にするなど大きな潜在的可能性を有している。

ミリ波帯で用いられる回路素子の開発の際、誘電体材料の複素比誘電率を正確に把握することは非常に重要である。現在、マイクロ波帯での材料の比誘電率測定法は空洞共振器法等^[1]が用いられているが、金属導体を用いているためそれ自身での損失が大きくなり、周波数が更に高いミリ波帯では複素比誘電率の測定が困難になる。そこで金属を用いないウィスパーリングギャラリーモード（WGモード）共振器を用いて、複素比誘電率の測定に関する研究を筆者等は行ってきた^[2]。

WGモード共振器とは、共振器の周に沿って進行する電磁波が、一周して戻ってきた時の位相差が $2n\pi$ （ n は整数で共振次数という）の整数倍になった時に共振するモードのことである。この共振器を用いた測定法は共振周波数と無負荷Q値の理論値と実験値から複素比誘電率を求める方法^[2]で、従来の共振法^[1]と比較して高い測定精度が得られる。しかし円板という形ゆえエッジ部でのエネルギーの放射があり、固有値方程式を求める際に近似を含まなければならないため、厳密解を得ることが非常に困難である。そのため周波数の適用範囲が制限されてしまう。

そこで本研究者はWGモード誘電体球状共振器を誘電体材料の複素比誘電率測定に利用することを提案してきた^{[3]～[8]}。まずWGモード誘電体球状共振器の固有値方程式を導出したところ、近似を一切含まず、簡単な形になることが分かった。また得られた理論共振特性（共振周波数、無負荷Q値）と実験から得られる値を比較すると両者は互いに良く一致することが分かった^[5]。さらに一組の共振周波数と無負荷Qの測定値から、ニュートン法を用いて複素誘電率を算定するソフトウェアを開発し、効率よく球状誘電体の誘電率測定を行うためのシステムを開発した^[6]。本算定法の検証を材

質がテフロン（PTFE）^[7]とポリエチレン^[8]で半径が異なる複数の試料に対する複素比誘電率の算定を行った．半径の大小にかかわらず，複素比誘電率の実数部は，概ね一定値となり従来の方法で得られる値と一致した．しかしながら，虚数部は若干の変動が見られた．虚数部算定は無負荷Q値の測定値に大きく依存する．よって規格化半径の導入し，無負荷Q値を正確に測定する必要がある．そのためには大まかな誘電率を算定しなければならない．今回はその誘電率の計算法について紹介する．

2. WGM誘電体球状共振器の固有値方程式について

図1に球状共振器と球座標系を示す．

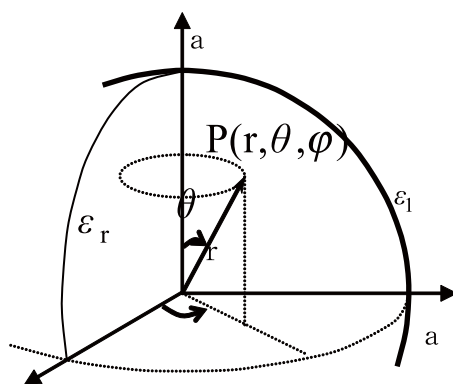


図1 球状共振器と球座標系

球の半径を a ，共振器内部及び周囲媒質は均一で等方性とし，それぞれの比誘電率を ϵ_r ($\epsilon_r' - j\epsilon_r''$)， ϵ_1 とする．WGモード誘電体球状共振器にはTEモードとTMモードの2つの共振モードが存在する．TEモードとは電界の r 方向成分が存在しない共振モードで，TMモードは磁界の r 方向成分が存在しない共振モードのことを言う．まず球座標系を用いてスカラー波動方程式を展開し，共振器内部 ($0 < r \leq a$) と周囲媒質 ($a < r$) での電磁界表示式を求める．次に境界 ($r = a$) で電磁界の接線成分が連続であるという条件を用いるが，球状の場合，これまで取り扱ってきた円板共振器と異なりエッジが無いため電磁界解析には近似を含まない．

TE，TMモードそれぞれの固有値方程式は次のように導出される^[3]．

$$\text{TEモード} ; -k_1 \cdot j_n \cdot h_n^{(2)} + k_r \cdot j_n' \cdot h_n^{(2)} = 0 \quad (1)$$

$$\text{TMモード} ; \epsilon_r \cdot j_n \left\{ h_n^{(2)} + k_1 \cdot a \cdot h_n^{(2)'} \right\} - \epsilon_1 \cdot h_n^{(2)} \left\{ j_n + k_r \cdot a \cdot j_n' \right\} = 0 \quad (2)$$

ここで

$$j_n = j_n(k_r a), \quad j_n' = \frac{\partial}{\partial(k_r r)} \left\{ j_n(k_r r) \right\} \Big|_{r=a}, \quad h_n^{(2)} = h_n^{(2)}(k_1 a),$$

$$h_n^{(2)'} = \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} \left\{ h_n^{(2)}(k_1 r) \right\} \Big|_{r=a}, \quad k_r = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}, \quad k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_1}, \quad \omega = 2\pi(f_R + if_I) \quad (3)$$

である．

$j_n(k_r r)$ は球ベッセル関数， $h_n^{(2)}(k_1 a)$ は第二種球ハンケル関数である．またこれらの関数の次数 n は共振時には整数となり，この n を ϕ 方向共振次数と呼ぶ．

TE モードの複素共振周波数は、(1) 式と (3) 式, TM モードのそれは、(2) 式と (3) 式に、球の半径 a と複素比誘電率 ϵ_r , Φ , 方向共振次数 n を代入することにより得られる。

3. 本簡易計算法について

今回はTEモードについてのみ説明する。

第二種球ハンケル関数は数学公式^[9]により球ベッセル関数で書き換えられる。よって式(1)は次のようになる。

$$\epsilon_r \cdot j_{n+1}(k_r)j_n(k_l) - j_n(k_r)j_{n+1}(k_l) + i \{ j_{n+1}(k_r)y_n(k_l) - j_n(k_r)y_{n+1}(k_l) \} = 0 \quad (4)$$

ここで

$$k_l = 2\pi a \sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_l}(f_R + if_I) = A + iB \quad (5)$$

$$k_r = 2\pi a \sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_r}(f_R + if_I) = \sqrt{\epsilon_r}A + i\sqrt{\epsilon_r}B \quad (6)$$

$$A = 2\pi a \sqrt{\mu\epsilon_0}f_R, \quad B = 2\pi a \sqrt{\mu\epsilon_0}f_I \quad (7)$$

であり、周囲媒質の誘電率 ϵ_l は1とみなしている。

球ベッセル関数とノイマン関数を次のような近似式で表されるとする。

$$j_n(k_r) = j_n(A) + iBj_n'(A) = j_n + iBj_n'$$

$$y_n(k_l) = y_n(A) + iBy_n'(A) = y_n + iBy_n' \quad (8)$$

$$j_n(k_r A) = j_n(\sqrt{\epsilon_r}A) + i\sqrt{\epsilon_r}Bj_n'(\sqrt{\epsilon_r}A) = j_n(\sqrt{\epsilon_r}) + i\sqrt{\epsilon_r}Bj_n'(\sqrt{\epsilon_r})$$

式(8)を式(4)に代入する。 $B^2 \ll 0$ とし、実数部と虚数部で分けると次のようになる。

実数部

$$\sqrt{\epsilon_r}j_{n+1}(\sqrt{\epsilon_r})j_n - j_n(\sqrt{\epsilon_r})j_{n+1} + Bj_{n+1}(\sqrt{\epsilon_r})y_n' + \sqrt{\epsilon_r}Bj_{n+1}'(\sqrt{\epsilon_r})y_n - Bj_n(\sqrt{\epsilon_r})y_{n+1}' - \sqrt{\epsilon_r}Bj_n'(\sqrt{\epsilon_r})y_{n+1} = 0 \quad (9)$$

虚数部

$$\sqrt{\epsilon_r}Bj_n'(\sqrt{\epsilon_r})j_n + \sqrt{\epsilon_r}Bj_{n+1}(\sqrt{\epsilon_r})j_n' + \sqrt{\epsilon_r}Bj_n'(\sqrt{\epsilon_r})j_{n+1} - Bj_n(\sqrt{\epsilon_r})j_{n+1}' - j_{n+1}(\sqrt{\epsilon_r})y_n + j_n(\sqrt{\epsilon_r})y_{n+1} = 0 \quad (10)$$

この2式からBを消去すれば、以下のような式が導出される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\epsilon_r} j_{n+1} (\sqrt{\epsilon_r}) j_n - j_n (\sqrt{\epsilon_r}) j_{n+1}}{j_n (\sqrt{\epsilon_r}) y_{n+1} + \sqrt{\epsilon_r} j_n (\sqrt{\epsilon_r}) y_n - j_{n+1} (\sqrt{\epsilon_r}) y_{n+1} - j_{n+1} (\sqrt{\epsilon_r}) y_n - \sqrt{\epsilon_r} j_{n+1} (\sqrt{\epsilon_r}) y_n} \\
& = \frac{j_{n+1} (\sqrt{\epsilon_r}) y_n - j_n (\sqrt{\epsilon_r}) y_{n+1}}{\sqrt{\epsilon_r} j_n (\sqrt{\epsilon_r}) j_n + \sqrt{\epsilon_r} j_{n+1} (\sqrt{\epsilon_r}) j_n + \sqrt{\epsilon_r} j_n (\sqrt{\epsilon_r}) j_{n+1} - j_{n+1} (\sqrt{\epsilon_r}) j_{n+1}}
\end{aligned} \quad (11)$$

この式で変数は半径 a ，共振次数 n ，複素共振周波数の実数部 f_R ，誘電率 ϵ_r である．半径 a を持つ誘電体球状共振器の実験で得られる共振次数 n と共振周波数 f_R を，この式に代入すれば誘電率 ϵ_r が簡易的に計算される．次の節では，共振次数と共振周波数の値を求める．

4. ポリエチレン球共振器の TE モード共振特性

本節ではポリエチレン球の共振周波数の測定について述べる．

共振周波数の測定回路を図 2 に示す．

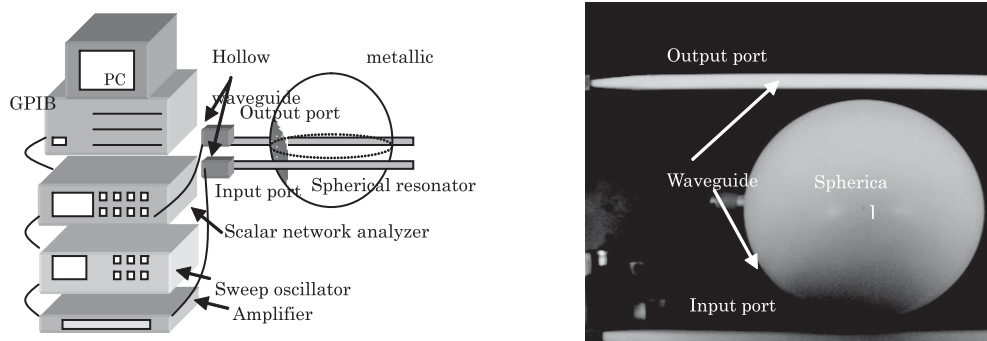


図 2 実験回路

球状共振器の近傍に方形誘電体導波路を配置する．ここで球状共振器及び導波路は発泡スチロールで支持され高精度 XYZ ステージ上に設置される． θ 方向に関する基本モードだけを励振するために， $\theta = \pi/2$ ， $\phi = 0, \pi$ （図 1 参照）の位置に誘電体導波路が配置されるよう XYZ ステージで調整する．ここで方形導波路は球状共振器と同じ材質のもので，その断面寸法は，球状共振器の ϕ 方向位相定数とほぼ一致させる^[8]と r 方向に関する高次モードの励振を抑えることができる．また共振特性を実験的に得るのに先立ち，金属導波管端部から共振器の励振部までの距離の 2 倍の長さを持つ方形誘電体導波路で，入出力導波管部を直結した回路を基準回路とし， S_{21} のキャリブレーションを取った．

発振器から出力された電磁波は，増幅され励振用導波路を介し，球状共振器を励振する．透過電力は検出用導波路を通りスカラネットワークアナライザのディスプレイ上に表示される．TE モードを励振する場合，金属導波管の TE_{10} モードの電界の偏波方向が θ 方向（ $\theta = \pi/2$ ）となるように金属導波管を配置する．半径 30, 35, 40, 45mm のポリエチレン球について，26GHz ～ 40GHz の範囲で周波数を掃引し，透過電力を測定する．例として T M モードの結果を図 3 に示す．

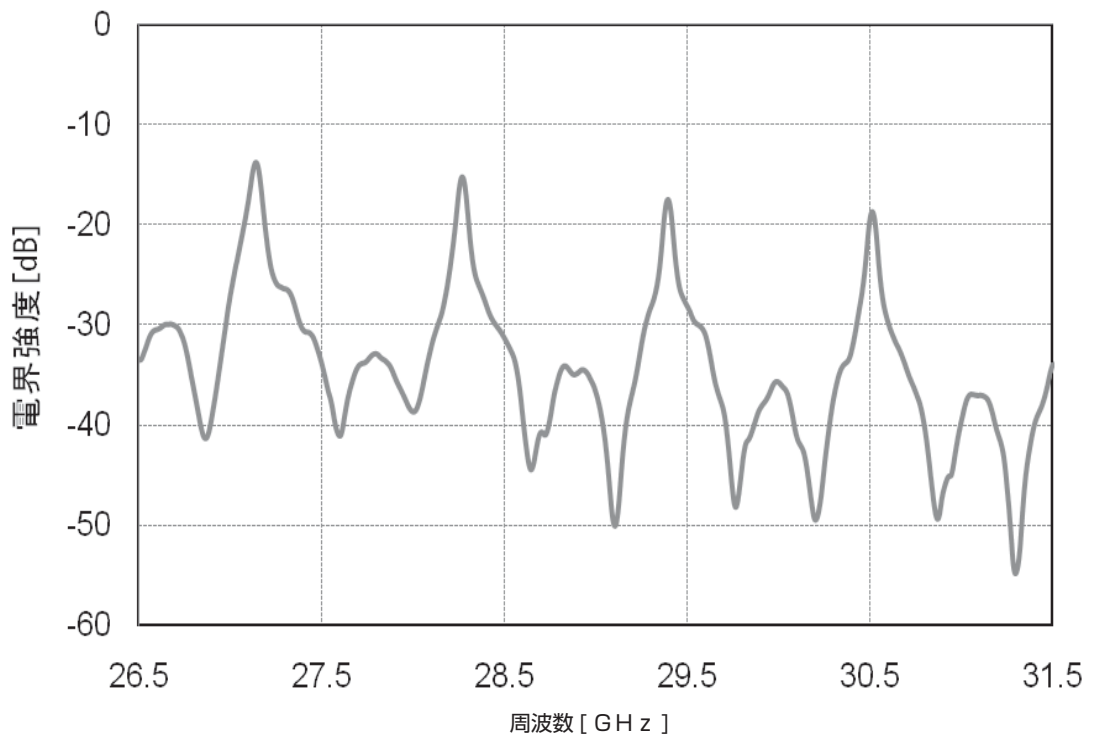


図3 共振波形

横軸は φ 方向共振次数 n であり，別途共振器近傍の電磁界分布を別途測定することにより得られる^[5]．図4はTEモードにおける電界の θ 方向成分 E_θ を周(φ)方向に測定した結果の一部である(半径は45mm・共振周波数は27.7461GHz)．横軸が φ 方向の角度，縦軸が電界強度である．0度～360度の間にあるピークの数的一半が共振次数と一致する．装置の都合上一周に渡って測定できないため，

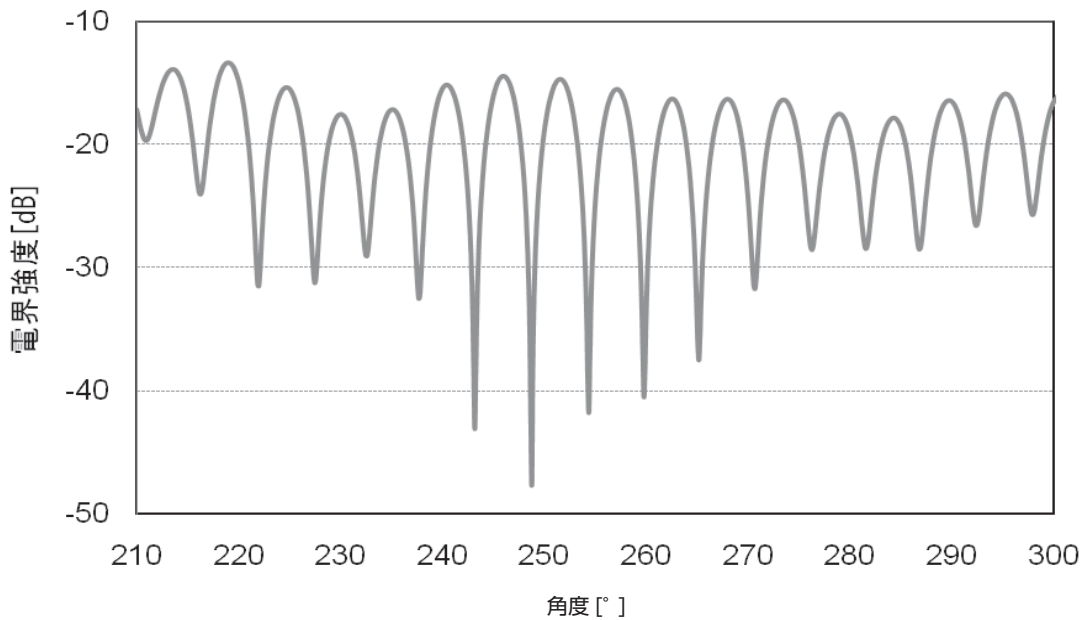


図4 周方向電界分布

比を使って計算している．なおこの図では共振次数が34になった．

同様の手順で、他の共振器の周方向電界分布を測定し共振次数を求める．得られた共振次数と共振周波数の関係を図5に示す．

横軸は共振次数、縦軸は共振周波数である．図中の記号はそれぞれ半径30～45mmの球状共振器に対応している．この共振次数と共振周波数の関係を用いて、次の節では簡易的な誘電率の算定を行う．

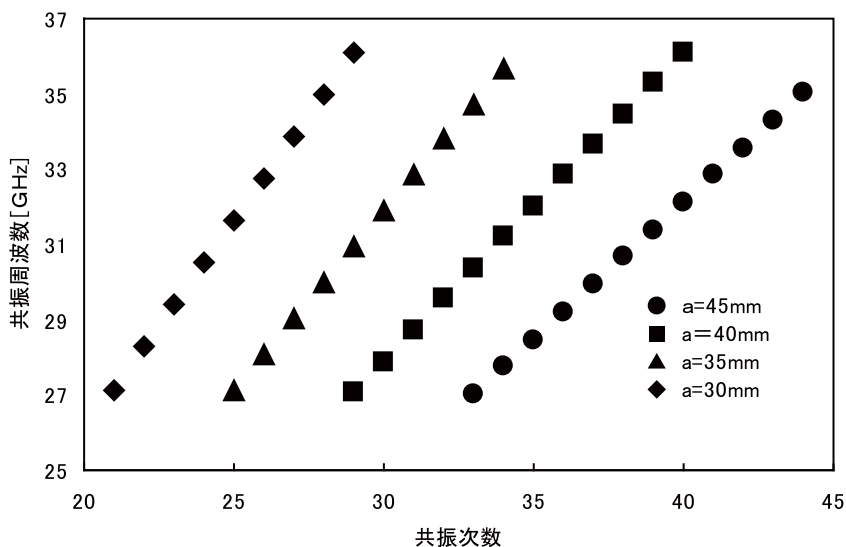


図5 共振次数と共振周波数の関係

5. 誘電率の算定

3節の結果を、式(11)に代入し、誘電率を簡易的に求める．計算プログラムはmathematicaを用いた．計算結果を図6に示す．

横軸は周波数、縦軸は誘電率である．図から分るように、どの共振器でも一定の誘電率2.35が得られた．なおこれまでのニュートン法を用いた算定法では、2.30となった．

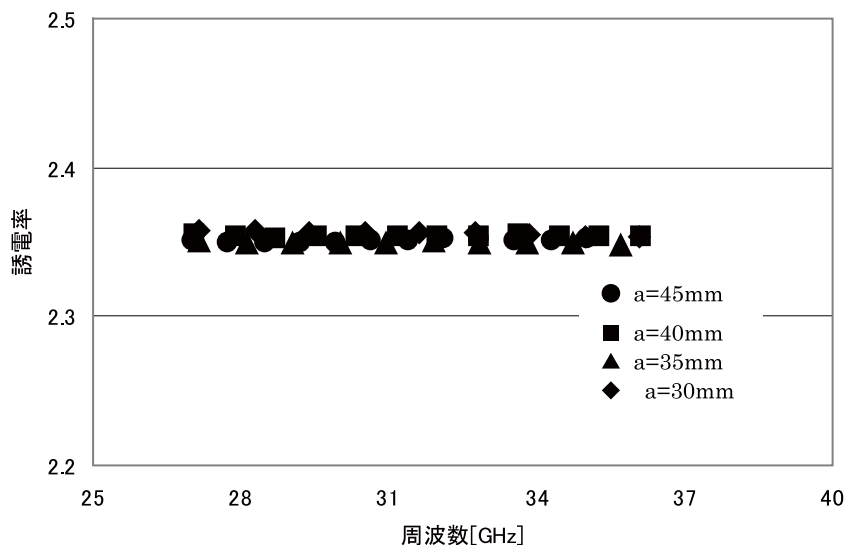


図6 共振周波数と誘電率計算結果の関係

むすび

本論文では、WG モード誘電体球状共振器を用いて、ミリ波帯における誘電体材料の複素比誘電率を簡易的に算定する方法を示した。この方法により、共振次数と共振周波数を測定すれば簡単な計算で複素比誘電率の実数部の目安を算定できる。この算定結果は、共振器の半径に関わらず、一定の値が得られることが分かった。この結果を規格化半径の導入の際利用すれば、複素比誘電率の虚数部を算定する際の最適半径を求める為に役立つと思われる。一方で、共振次数を決定する際の装置の都合上一周に全ての電界分布を測定することが出来ないため、得られた結果に僅かなズレが生じる（共振次数で 1 程度）。これにより、誘電率の算定結果に数%の誤差が生じることが分っている。今後共振次数の算定に関して改善策が必要となる。

しかしながら今回の簡易算定法は、ミリ波帯における誘電体材料評価法として有望であることが示された。

参考文献

- [1] 小林禧夫；“誘電体共振器とフィルタ入門講座”，講演会資料，（1989）
- [2] 田村先，古神義則，松村和仁：“ウィスパリングギャラリーモード共振器を用いたミリ波複素誘電率測定法の精度に関する検討”，電子情報通信学会論文誌（C），vol.J86-C，no.2, pp.147 -154,（2003）
- [3] 黒澤豊；誘電体球状共振器の共振特性に関する研究”，宇都宮大学教育教育学研究科修士論文，（2005）
- [4] T. Onodera, M. Matsubara, Y. Kogami and Y. Tomabechi, "Millimeter-wave Permittivity Measurements for low-loss dielectric materials using WG mode spherical resonators," 2004 China-Japan Joint Meeting on Microwaves, Proceeding of CJMW '2004, pp.70-73. (Harbin , China),（2004）
- [5] 松原 真理，古神 義則，苔米地 義郎，“ウィスパリングギャラリーモード誘電体球状共振器の共振特性”，信学論（C），vol.J88-C，No.2, pp. 124-125,（2005）
- [6] 松原真理，亀山雄児，古神義則，苔米地義郎：誘電体球状共振器を用いた誘電体材料の複素比誘電率の測定法に関する検討，電子情報通信学会論文誌，C ,Vol. J 90-C,No.3,pp.216-222，無線通信を支えるマイクロ波・ミリ波高機能材料とその関連技術特集号，2007 年 3 月
- [7] 松原真理，苔米地義郎：誘電体共振器を用いたミリ波帯における複素比誘電率の測定法：宇都宮大学教育学部紀要，Vol. 58-2, pp. 41-48, 2008 年 3 月．
- [8] 松原真理，苔米地義郎：ミリ波帯におけるポリエチレン球の共振特性について，宇都宮大学教育学部紀要，Vol. 59-2, pp. 65-73, 2009 年 3 月．
- [9] 森口繁一 他：数学公式，岩波書店